

5 論理を学ぼう

5.1 ていねいな文章

晴れならば運動会をする

日常会話の中から論理を勉強をしていく。

晴れならば運動会をする

とは日常会話の中では、雨ならば運動会は中止であることも意味します。すなわち、「晴れであること」と「運動会をすること」は同じ意味を表しています。

しかし、数学や論理学では、雨の場合は運動会をするかしないかは決めていないと考えます。

一般に「 A ならば B 」は「 B ならば A 」を意味しません。そして、「 A ならば B 」と「 B ならば A 」は意味が異なります。

次のように考えよう。「晴れならば運動会をする」をていねいにいえば、「晴れならば運動会をするが、晴れでない場合はするかしないかは決めていません」となります。

「雪が積もればスキーに行く」とは「雪が積もればスキーに行きますが、雪が積もらない場合はスキーに行くかどうかは決めていません」となります。雪が積もっていないゲレンデでスキーができるかどうかは考えないことにします。

数学の例を考えよう。

(1) $x = 1$ ならば $x^2 = 1$ である。

(2) $x = 1$ ならば $x + 3 = 4$ である。

(1) をていねいにいえば「 $x = 1$ ならば $x^2 = 1$ ですが、 $x \neq 1$ のときは $x^2 = 1$ となるかどうかはわかりません」となります。

$x \neq 1$ のとき、 $x = -1$ のときは $x^2 = 1$ となるし、 $x = 3$ のときには $x^2 = 9 \neq 1$ となります。

したがって、「晴れならば運動会をする」とは、「晴れでない場合は、運動会をするかしないかは決めていない」と考えます。

ところが、(2) では $x = 1$ と $x + 3 = 4$ は同じことを表しています。これは、「 $x + 3 = 4$ ならば $x = 1$ であるもなりたっているからです。

(2) の場合「 $x = 1$ 」ならば「 $x + 3 = 4$ 」であり「 $x + 3 = 4$ 」ならば「 $x = 1$ 」であるといえます。このような場合、「 $x = 1$ 」と「 $x + 3 = 4$ 」は同じことを表していると考えます。

「 A ならば B 」と「 B ならば A 」の両方が成り立つときに A と B は同じとみなします。専門用語では A と B は同値といいます。

さらに、次のような場合も文章の順番も気にしないといけません。

(I) 「ある薬があつて すべての病気に効く」と

(II) 「すべての病気に ある薬があつて効く」

は順番が違うだけで意味がまったく異なります。

(I) は、どんな病気にも効くある魔法の薬があるといっています。

(II) は、風邪には風邪薬、腹痛には胃腸薬があるといっています。

練習 1 次の文書をていねいな文章に書き換えましょう。

- (1) テストで 90 点以上取れたら TDL に連れて行く。
- (2) 宝くじが当たれば家を買う
- (3) 三角形で 3 つの辺の長さが等しければ正三角形である。
- (4) 正方形ならば菱形である。
- (5) 警報が出ると学校は休校になる。
- (6) 鳥は空を飛ぶ。

5.2 否定

ある文章 A に対して「 A でない」という文章を文章 A の否定といいます。たとえば、「明日は晴れである」の否定は「明日は晴れでない」となります。

「晴れならば運動会をする」の否定を考えよう。もう一度「晴れならば運動会をする」という文章をていねいに表します。「晴れならば運動会をするが、晴れでない場合はするかしないかは決めていません」ということでした。

したがって、「晴れならば運動会をする」の否定は「晴れていたのに運動会が中止」です。

晴れていない場合には運動会をしてもしなくても良かったので、「晴れていないのに運動会をする」ではないことに注意してください。

練習 2 上の練習 1 の文章の否定の文章を作れ。(慣れていないといきなり否定の文を作るのは困難かもしれません。その場合には、ていねいな文にして考えましょう。)

あるコメディアンの例

あるコメディアンが占い師にいわれました。

「おサルという芸名をモンチチィに改名しないと売れないわよ」

では、どのようなときにこの占いが外れたといえるのでしょうか。

- (1) 改名しなかったけれど売れた。
- (2) 改名したのに売れなかった。
- (3) 改名しなくて売れなかった。
- (4) 改名して売れた。
- (5) それ以外のとき。

わかりやすいように、大事なところだけ鍵カッコ付で書いておきましょう。

「改名しない」ならば「売れない」

となります。ていねいにいえば「改名しないと売れないけれど、改名した場合は売れるかどうかはわかりません」となります。改名しない場合だけ述べているので、改名した場合は売れるかもしれないし売れないかもしれないのです。

「改名しないけど売れた」ときにこの占いは外れたとなります。

日常の言葉使いと数学との違いに注意が必要です。日常会話では「おサルという芸名をモンチチィに改名しないと売れないわよ」とは、改名したら売れると暗に示しているので、注意が必要です。だから、「改名したのに売れない」場合を占いが外れたと思うのです。

5.3 対偶

「晴れならば運動会をする」をていねいにいえば、「晴れならば運動会をするが、晴れない場合はするかしないかは決めていません」でした。

運動会をしているときの天気はわかるでしょうか？晴れならば運動会をするが、晴れないときも運動会をしているかもしれないことがわかります。

運動会をしていないときの天気はわかるでしょうか？このときは晴れでないとわかりま
す。「運動会をしていないならば晴れでない」ことがわかります。

同様に考えることにより「運動会をしていないならば晴れでない」から「晴れならば運
動会をする」が導き出されます。したがって、この2つの文章は同じ意味を持っていると
考えることができます。

「AならばB」に対して「BでないならばAでない」を対偶といいます。そして、元の
文章と対偶の文章は同じ意味(同値)を表しています。

練習3 p.38の練習1の対偶はどんな文章になるか？また、もとの文章と同じ意味になっ
ていることを確かめよ。

対偶をとっても同じ意味を表すので、知らず知らずのうちに対偶で考えていることがあ
ります。

たとえば、「犯人ならば犯行現場にいた」のだから「犯行現場にいなければ犯人でない」
ことになります。

練習4 「勉強するならばよい成績を取れる」と「勉強しなければよい成績は取れない」の
違いを述べなさい。

5.4 畳を敷きましょうから

4章の議論を論理の方から見なおすことにします。4.1節の7畳の問題をもう一度考え
てみましょう。

問題1 図5.1に畳を敷き詰めることができますか。

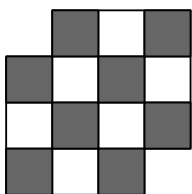


図5.1 7畳の部屋に色を塗る

「畳を敷き詰める事ができた」とすると白と黒の枚数は同じ」ことを示しました。図5.1
で白と黒の枚数を数えると白が6枚、黒が8枚あるので枚数が同じではありません。そこ

で、対偶をとって「白と黒の枚数が同じでないならば畳を敷き詰めることができない」*1ことがわかります。よって、この部屋には畳を敷き詰めることができないことがわかりました。

次に 4.3 節の問題を考えてみます。

問題 2 図 5.2 のグラフに対して、ある頂点から出発して、辺に沿って移動してすべての頂点を一度だけ通って元の頂点に戻ってくることができますか。ただし、通らない辺があってもかまいません。

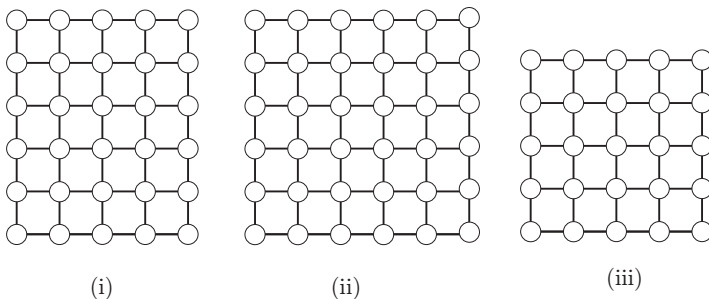


図 5.2 すべての頂点をまわって

ここで重要なことは、すべての頂点をまわることが可能ならばなぜ可能なのかの証明を示し、不可能ならばなぜ不可能かの証明を示さないといけません。

その証明の中に推測が入ってはいけません。

図 5.2 の (i) と (ii) のグラフが可能なことはわかると思います。道順を示せば証明になります。

問題は (iii) のグラフです。いくら試しても不可能です。したがって、(iii) のグラフはまわることができないと仮定して、それを論証していく必要があります。

「(i) と (ii) のグラフの頂点の個数が偶数なので可能、(iii) のグラフの頂点の個数は奇数だから不可能」と解答する学生がいます。しかし、これは証明にはなりません。これは、

*1 ていねいな文章で言い換えれば「畳を敷き詰める事ができたとするとき白と黒の枚数は同じですが、畳を敷き詰める事ができない場合は白と黒の枚数は同じかどうかわかりません」となります。

すると、白と黒の枚数が同じ場合は畳を敷き詰める事ができるかもしれないしできないかもしれません。しかし、「白と黒の枚数が異なると畳を敷き詰める事ができない」ことがわかります。すなわち、対偶を考えています。

- (1) 頂点の個数が奇数
- (2) すべての頂点をまわることができない,

として, (1) から (2) が導き出されると主張しています.

しかし, 図 5.3 のグラフは頂点の個数が 25 個の奇数ですが, すべての頂点をまわることは可能です. したがって, (1) の条件だけでは (2) を導くことはできません.

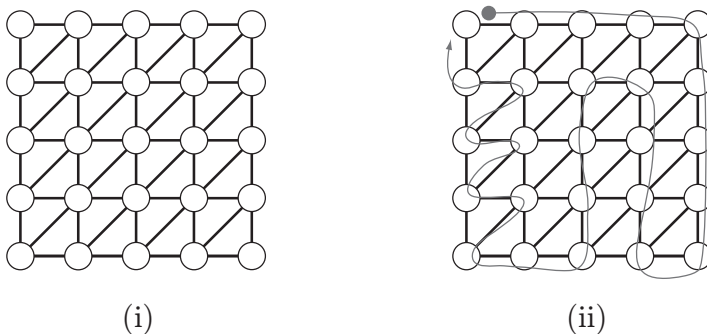


図 5.3 奇数個の頂点

正しい証明をもう一度与えてみます. 証明の目標を明示しておきましょう.

図 5.2 の (iii) のグラフは, 「すべての頂点をまわって戻ってくる事は不可能」

そして, 4.3 節の証明を箇条書きにして書き出します.

- (1) 頂点を白と黒で塗る.
- (2) 辺で隣り合う頂点の色は異なる.
- (3) したがって辺に沿って移動すると白と黒が交互に出てくる.
- (4) 出発点に戻ってくることが可能ならば白と黒の個数は同数.
- (5) 白と黒の個数は同数ではない.
- (6) よって不可能.

以上ようになります.

- (1) は証明のための準備で,
- (2) だから (3), (3) ならば (4),
- (4)(実際には (4) の対偶) だから, (5) なので (6)

という構造を持っています. さらに, (3) (5) が成り立つグラフに対して結論 (6) が得られることがわかります.

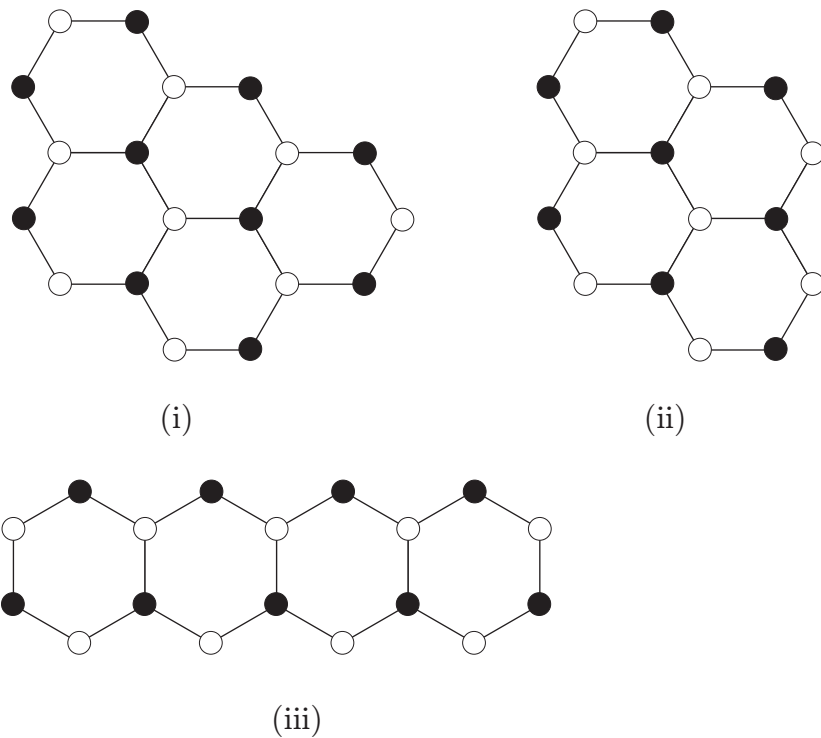


図 5.4 不可能なグラフ

たとえば，図 5.4(i) に対して不可能だと証明することが可能です．

証明に必要な条件を突き詰めていくことで，証明の範囲を広げていくことも可能です．しかし，白と黒の個数が同数の場合，すべての頂点をまわって戻ってくるのが可能かどうかはわからないことに注意してください．

たとえば，図 5.4(ii) のグラフと図 5.4(iii) のグラフは白と黒の個数は同数になりますが，(ii) のグラフは不可能で (iii) のグラフは可能です．

証明をするときには，証明の目標，証明に使うよいこと，証明の構造を明確にする必要があります．

さらに，証明の中の論証に推測などあるかも気にする必要があります．

レポート 9 問題 1 の証明を上のように箇条書きにして，どのような構造を持っているかを述べよ．





武良 詩乃

大木真を慕っている、ある意味フツの女の子。
友達が多く、みんなで助け合う。

ブラシノステロイド [Brassinosteroid]
伸長成長 細胞分裂 種子発芽 病害抵抗

1960年代、大量の花粉からほんのちよつと発見。1979年に単離。テルペノイド由来のステロイドの一種でメバロン酸から合成。前駆体はカンペステロール。ステロイドラクトン構造を持ち、類縁体は50種を超える。関連するステロイド化合物を総称してブラシノステロイドと呼ぶが、普通は一番活性が高いブラシノライドを指す。植物界にあまりに広く分布していたため、普遍的すぎて長いあいだ植物ホルモンとしては認められていなかった。オーキシンやジベレリンと似た作用を持つが、こいつだけものすごく低濃度(千兆分の1M)でも作用することが出来る。受容体はBRI1。ストレス応答時は他のホルモンと協力して抵抗性を発現。シグナルカスケード活性化機能も持つ。オーキシンと同じく成長促進するが、BRは内部細胞にも働きかけることができ、応答の範囲も幅広い。ただし他のホルモンに比べて植物内で移動しにくい。細胞や茎の成長には必須であり、特に葉柄、胚軸には重要に働く。また、こいつもエチレン生産に関与している。



<http://bakeinu.bake-neko.net/hormone/index.html>