9　赤い三角形・青い三角形

9.1　補グラフ

完全グラフとは, 図 9.1 のグラフのようにどの 2 つの頂点も 1 本の辺で結ばれているグラフです．頂点の個数が n のとき K_n で表わします.

完全グラフ K_n の各頂点を赤と青色で塗りましょう．そして, 各辺を赤か青で好きなように色を塗ってみよう．図 9.1 の K_7 の頂点が 2 重丸になっているので小さい円を赤, その外側を青で塗りましょう．辺を赤か青で塗りましょう.

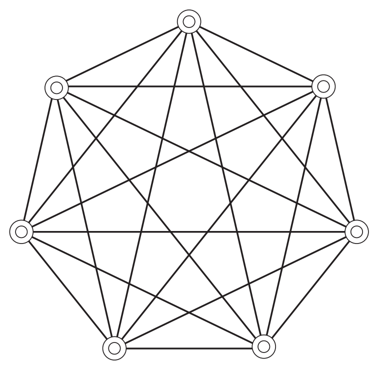


図 9.1　K_7

すべての頂点と青い辺からなるグラフを**青いグラフ**と呼び, すべての頂点と赤い辺からなるグラフを**赤いグラフ**と呼ぶことにします．このとき, 青のグラフ G に対して赤のグラフを G の補グラフといいます．また, 赤のグラフに対して青のグラフを赤のグラフの補グラフという．補グラフのときは頂点はすべての頂点をとることに注意しよう．（そのために頂点を 2 色で塗りました.）図 9.2 に例をかいておいた.

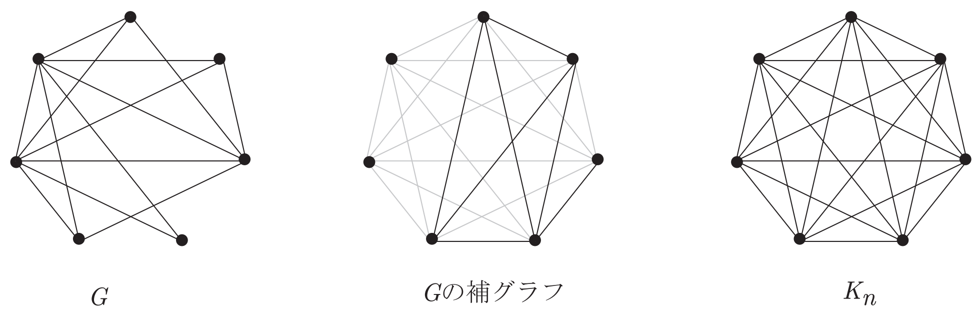
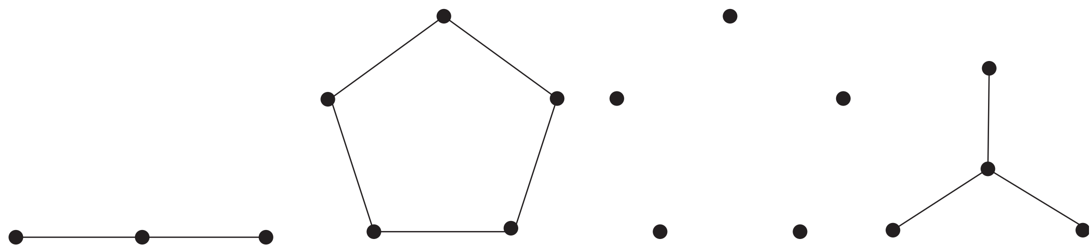


図 9.2　補グラフ

頂点数が n 個のあるグラフ G が与えられたとき, K_n の頂点にこのグラフの頂点が来るように並べ替え, そ

して, K_n になるように辺をいれる. これを青のグラフと思ったときに, 赤のグラフが G の補グラフとなります. また, 完全グラフ K_n の補グラフは n 個の頂点だけになります.

練習 図 9.3 のグラフに対して補グラフを求めよ.



(1) (2) (3) (4)

図 9.3 補グラフを求めよ

補グラフの概念は, 集合論で学んだ補集合の概念から来ています. たとえば, 集合 $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ を考えよう. このとき, $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ の補集合は $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ になります.

このクラスで男の子全体の集合の補集合は女の子全体の集合ですね.

9.2 赤い三角形・青い三角形

完全グラフ K_n を考える. 9.1 節で行ったように各辺を赤と青で適当に塗る. 例として K_6 で考えよう. この時, K_6 の部分グラフ K_3(三角形のグラフ) ですべての辺が赤色と青色となるものどちらもできないようにしたい.

この三角形を各々赤い三角形・青い三角形と呼ぶ.

図 9.4 にいくつか K_6 を描いておいたので各自考えながら色塗りをしてみよう.

K_6 の辺の数は 15 本より, 色の塗り方は $2^{15} = 32,768$ 通りあります. このグラフ全部を考えると赤い三角形も青い三角形もできない塗り方が 1 つはあるかもしれません.

問題 K_5 の各辺に色をつけて赤い三角形も青い三角形もできないようにしなさい. 失敗しても大丈夫なように図 9.5 に多めに描いておきました.

実は K_6 ではどのような彩色をしても, 赤い三角形か青い三角形の少なくともどちらかができます. ただし, 青い三角形と赤い三角形の両方ができるというわけではありません.

これを使ったものとして昔からパーティー問題と言われているものがあります.

[パーティー問題]

6 人を集めると必ず互いに知っている 3 人組みか互いに見ず知らずの 3 人組みが必ずいるということです.

時間に余裕があれが, このクラスで実験してみましょう.

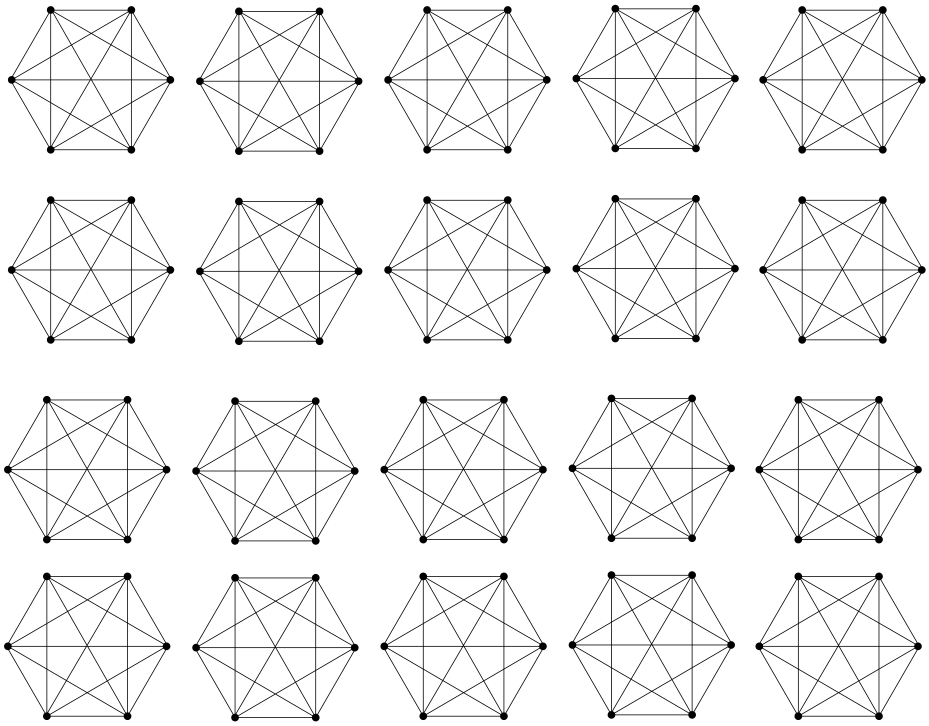


図 9.4　辺を赤と青で塗る

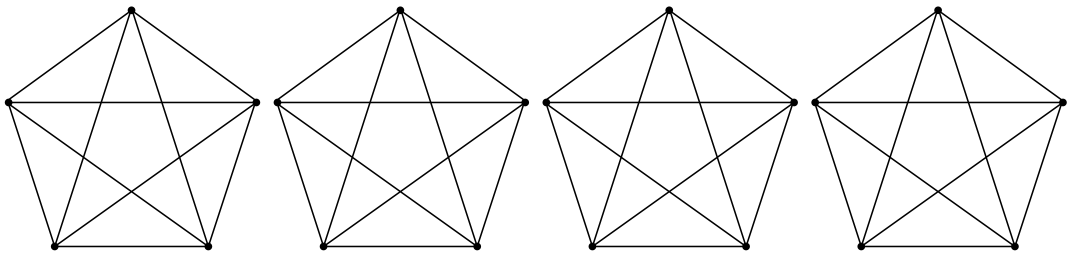


図 9.5　K_5 のグラフでは

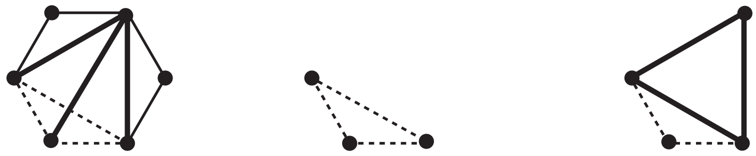
6 人を頂点としてみて 2 人が知り合いだったら青色の辺でこの 2 つの頂点をつなぎ, 他人だったら赤色の辺でつなぐとすると, パーティー問題は次の定理 9.2.1 に変わります.

定理 9.2.1 K_6 の各辺を青か赤で塗る. このとき部分グラフ K_3(三角形) ですべての辺が青か赤で塗られたものが存在する.

この定理を証明してみよう.

原始的な証明の仕方はすべての塗り方 $2^{15} = 32,768$ 通りを考えてすべてにどちらかの「まる」が付いていることを確かめることです.

証明 K_6 をノートに描いて適当に青と赤で辺を塗りましょう.(図 9.7 に書き込みなさい.) K_6 のすべての頂点に青と赤の辺の本数を書き入れなさい.



(i)　(ii)　(iii)

図 9.6　赤い三角形

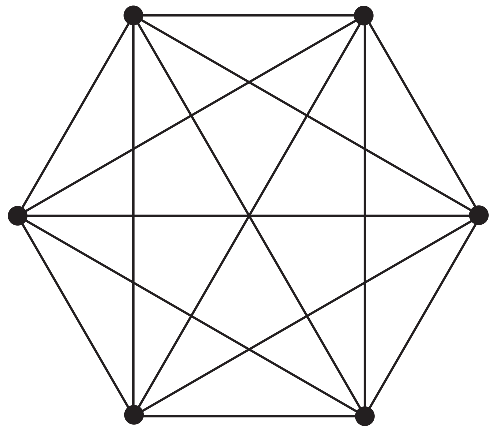


図 9.7　K_6

考察 すべての頂点で青か赤の辺の数のどちらかは 3 以上だという事に気が付きましたか？

1 つの頂点に注目する．すると, 辺は 5 本出ているのがわかるだろう．5 本を赤か青で塗ったのでどちらかの色は 3 本以上です．それを青色としよう．(もし, 赤色だったら, 以下の文章の青色をすべて赤色に変えれば良い.)

Step 1. 図 9.6 (i) のように, その青い辺から 3 本選び太く塗ってください.

Step 2. これらの辺のもう一つの頂点に青色で大きく丸で囲みましょう．3 つ頂点があるので, それらを頂点とする新しい三角形ができました．図 9.6 (ii) の点線でできた三角形がそうです.

Case 1. もし, その三角形の中に青色の辺があればもとの青い辺とあわせて青い三角形ができます．図 9.6 (iii) の三角形です.

Case 2. 三角形の辺に青色の辺がまったくなかった (すべて赤色だった) ら, その三角形が赤い三角形となっています.

以上より**証明されました**.

これはラムゼー (Ramsey[*1]) の定理と呼ばれているものの一部です.

[*1] Ramsey について調べていると NTT の研究所のホームページに行きついた．グラフ理論はネットワーク・電気回路等の数学的モデルとして利用されている他, ネットワークデザイン, ビジュアルインタフェースなど幅広い分野へ応用されているので当然といえば当然なんだけど.

レポート 23 K_7 に対しても同様の定理がなりたちます．証明を与えよ．一般に K_n $n \geq 6$ に対して定理は成立します．

このようにこの証明ではあまり数式が出てきません．数学ができると思っている学生でも，このような言葉で論理を進めるのが苦手な学生もいるし，文系の学生でも，このような言葉で組み立てていくのが好きな学生もいます．計算ばかりするのが数学ではありません．

レポート 24 K_{17} の辺を赤・青・黄色で塗り分けました．この時部分グラフ K_3 ですべての辺が同じ色となるものがあることを示しなさい．

レポート 25 K_{10}*2の辺を赤と青で塗り分けました．すべての辺が青色となる部分グラフ K_4 かあるいは，すべての辺が赤色となる部分グラフ K_3 が存在する事を示しなさい

9.3 K_3 に色を塗って

K_3 の各頂点を赤と青で塗る事を考えよう．

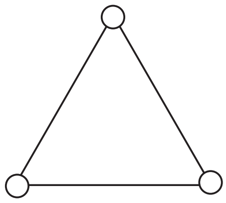


図 9.8 K_3

何通りの塗り方があるでしょうか？

2^3 通りあります．$2^3 = 2 \times 2 \times 2$ の各々の $\times 2$ は図 9.9 での枝別れの本数に対応している事がわかります．

また，掛けた回数は頂点の個数と対応している事が分かります．

レポート 26 K_3 は三角形の重心での 120° の回転でうつりあうので回転でうつりあう同じ彩色の三角形は同じだと考えると，頂点を赤と青で彩色した時の色塗りは何通りになるでしょうか？また，同じ塗り方になる三角形の個数は各々いくらになりますか？

9.4 K_4 に色を塗って

次に K_4 の頂点に赤色と青色を塗ることを考えます．

図 9.10 の (i) と (ii) は同じグラフでしょうか，それとも異なるグラフでしょうか．(ii) のグラフは頂点が $\{1, 2, 3, 4\}$ で辺が $\{12, 23, 34, 13, 14, 23\}$ となるグラフです．そして，1 と 4 が青い頂点です．これを (iii) で

*2 K_9 に対しても成立するが，証明を簡単にするために K_{10} にした．

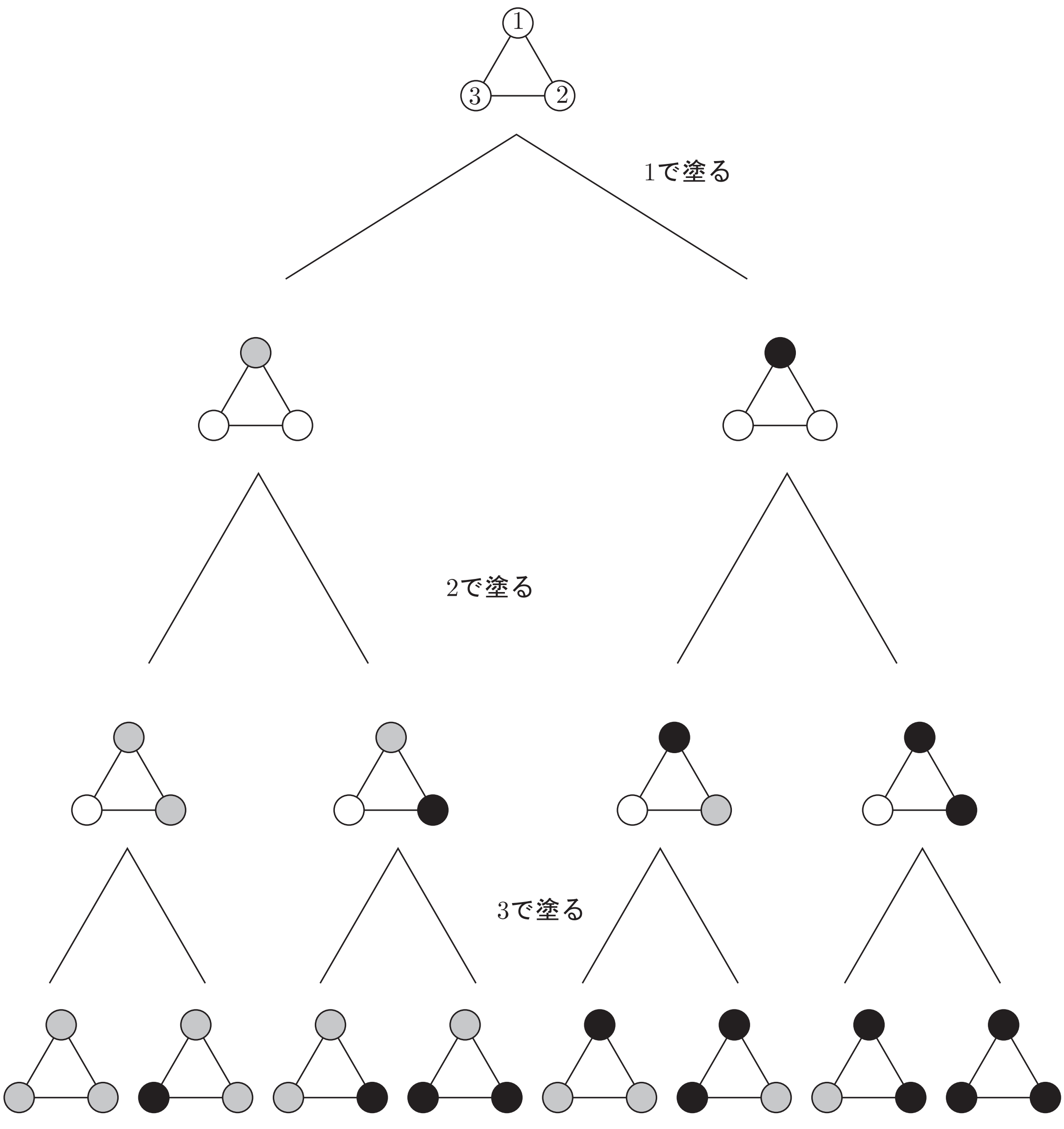


図 9.9　K_3

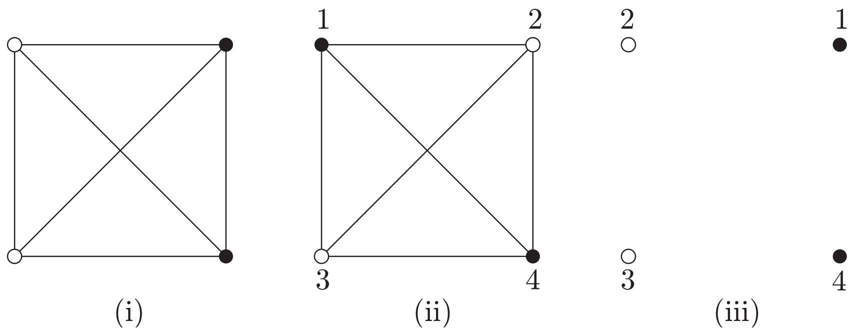


図 9.10　K_4

表された頂点に対して辺を書き込みましょう．すると (i) と同じグラフが得られました．これを踏まえて次のレポート問題をしなさい．

レポート 27 K_5 について同様に頂点を赤と青の 2 色で塗ってください．グラフの同形 (同じグラフ) で移りあうものを同じだと考えた時に個数はどのようになるでしょうか．

レポート 28 K_3 の頂点を三色 (青・赤・黄色) で塗った．何通りの塗り方がありますか？ (K_3 を回転でうつりあうものは同じだとみなしています.)

また, ひっくり返してもよいと考えた時はどうなるでしょうか？

レポート 29 ネックレスに色違いのビーズが 9 個つながっている. ネックレスを回転させても良いがひっくり返さないとすると, 何種類あるか？またひっくり返しても良いものとすると何種類あるか. さらに K_9 の頂点に色違いのビーズがあるとすると, 何種類あるか？

レポート 30 赤のビーズ 5 個と青のビーズ 2 個のネックレスがあった. 何種類あるか？ (ひっくり返すのを許した時と許さない時で変わりはあるか)