

## 13 たくさん観光するためには

### 13.1 ある国への外国旅行

ある国は不思議なことにどの隣町に行くにも自動車でも1時間掛かります。図13.1がその国の道路地図です(グラフの角と交点が頂点すなわち町で辺が道路です)。今X町のホテルにいて、町A、B、C、Dに行くのに最短で各々何時間掛かるでしょうか。

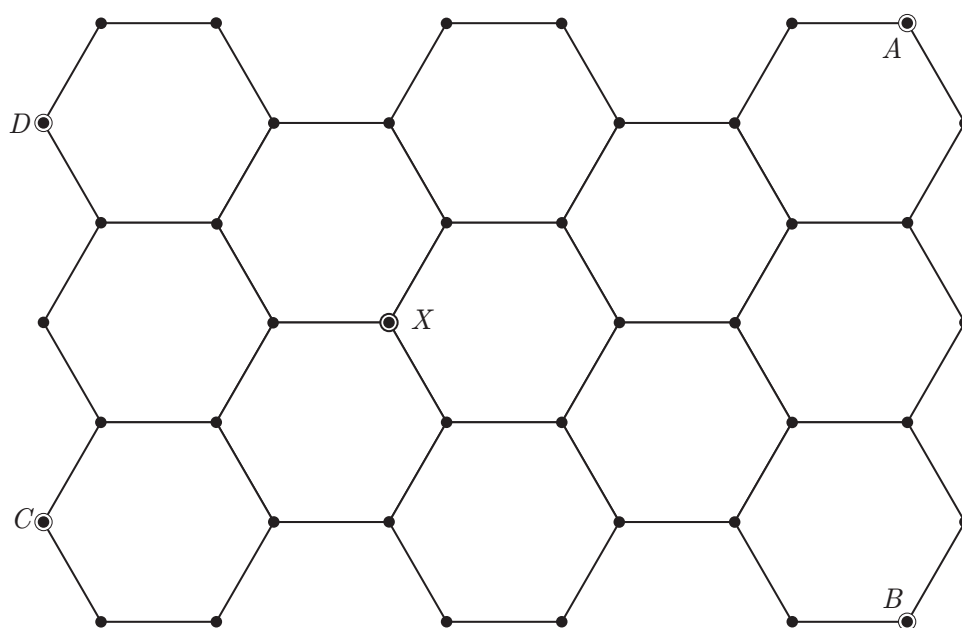


図 13.1 ある国の道路地図

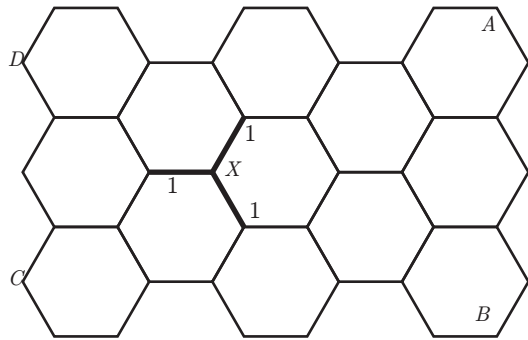
#### X から A に行く場合

試行錯誤をしながら(旅とはそういうものさ、とつぶやきながら)、何時間かかるかを考えても良いのですが、定期的に調べるにはどうすれば良いだろうか。ムーア (Moore) のアルゴリズムがあります。多くの本にはコンピュータに乗るようにプログラムの形で書いてありますが、ここでは、最短時間と経路を求める方法を解説します。

初めに、1時間で行く事のできる町をすべて求めます。次に2時間で行く事のできる町をすべて求めます。以下、同様の事をします。すなわち、力づくで時間を求めていきます。

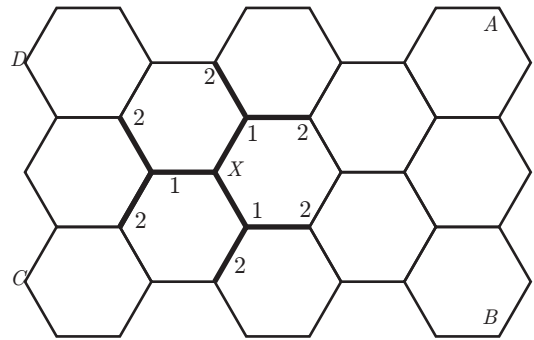
#### ムーア (Moore) のアルゴリズム

- (1) X から1時間で行くことのできる頂点すべてに1を書き込み、その頂点とXを結ぶ辺を青色で塗る。
- (2) 青で塗られた頂点から、まだ色のついていない頂点で1時間で行くことのできる頂点すべてに2と書き込みその頂点と対応する辺を青色で塗る。
- (3) 青で塗られた頂点から、まだ色のついていない頂点で1時間で行くことのできる頂点すべてに3と書き込みその頂点と対応する辺を青色で塗る。
- (4) 以下この操作を繰り返す。



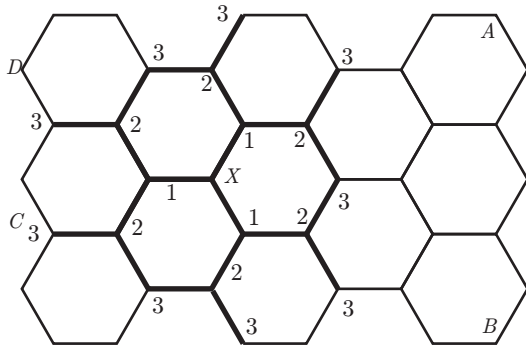
Xから1時間以内

(1)



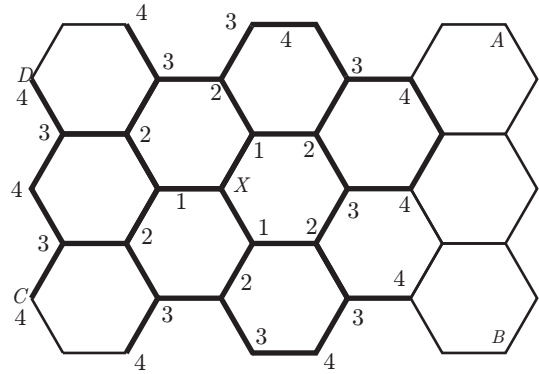
Xから2時間以内

(2)



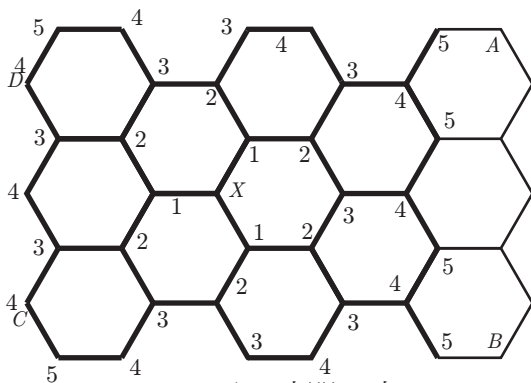
Xから3時間以内

(3)



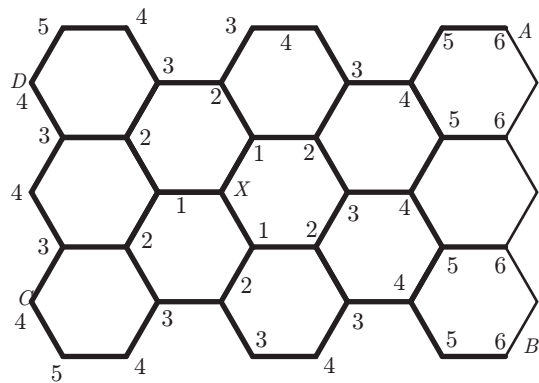
Xから4時間以内

(4)



Xから5時間以内

(5)



Xから6時間以内

(6)

図 13.2 最短経路と時間

頂点に書かれた数字が最短時間で  $X$  から最短時間の頂点を通る辺で結ばれた道が最短経路 (青色の辺で遠回りしない道) となります。

初めて、このアルゴリズムの事を勉強した時には、このアルゴリズムはちょっと複雑そうで何かすばらしいアイデアで最短経路を求めているのだらうと思いました。しかし、このアルゴリズムは、近くにある町から遠くの町へと手当たりしだいに、時間を求めています。

今の所、効率の良いアルゴリズムは知られていません。よって、計算には時間が掛かる場合があります。そこで、多くの本では最短経路と時間を調べるために掛かる時間は、どれくらいかを調べています。(この授業ではどれくらい時間が掛かるかなどはしません。)

図 13.2 が上のアルゴリズムで  $X$  からの時間を求めたものです。すると、 $A$  には 6 時間でいけることがわかりました。また、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  に行くのにも何時間かかるかがわかります。また、最短時間でいける町を通って行く道が最短経路になります。また、最短経路はいくつもある場合があります。コンピュータで計算させる場合は何らかの優先順位を与えないといけません。人間が手で計算する場合、最短経路がいくつかあってもあまり気にしなくても良いです。

練習 図 13.3 で  $X$  から町  $A$ 、 $B$ 、 $C$  へ行く最短経路と時間を求めよ。(1 つの辺を移動するのに 1 時間かかる)

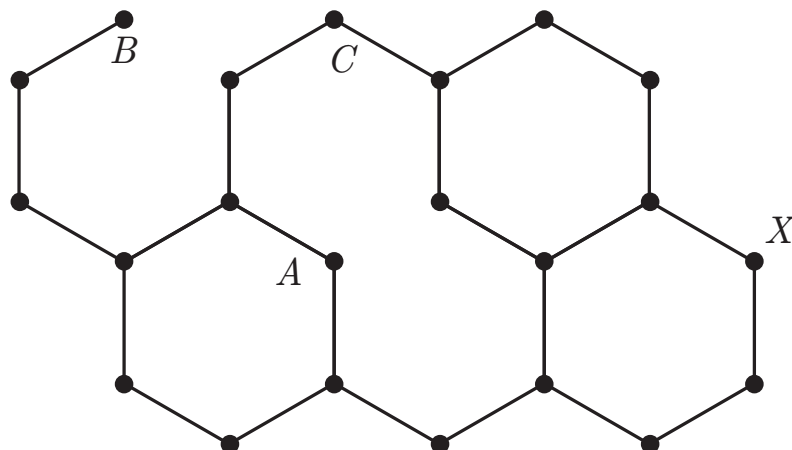


図 13.3 最短経路と時間 1

練習 図 13.4 で  $X$  から町  $A$ ,  $B$ ,  $C$  へ行く最短経路と時間を求めよ.

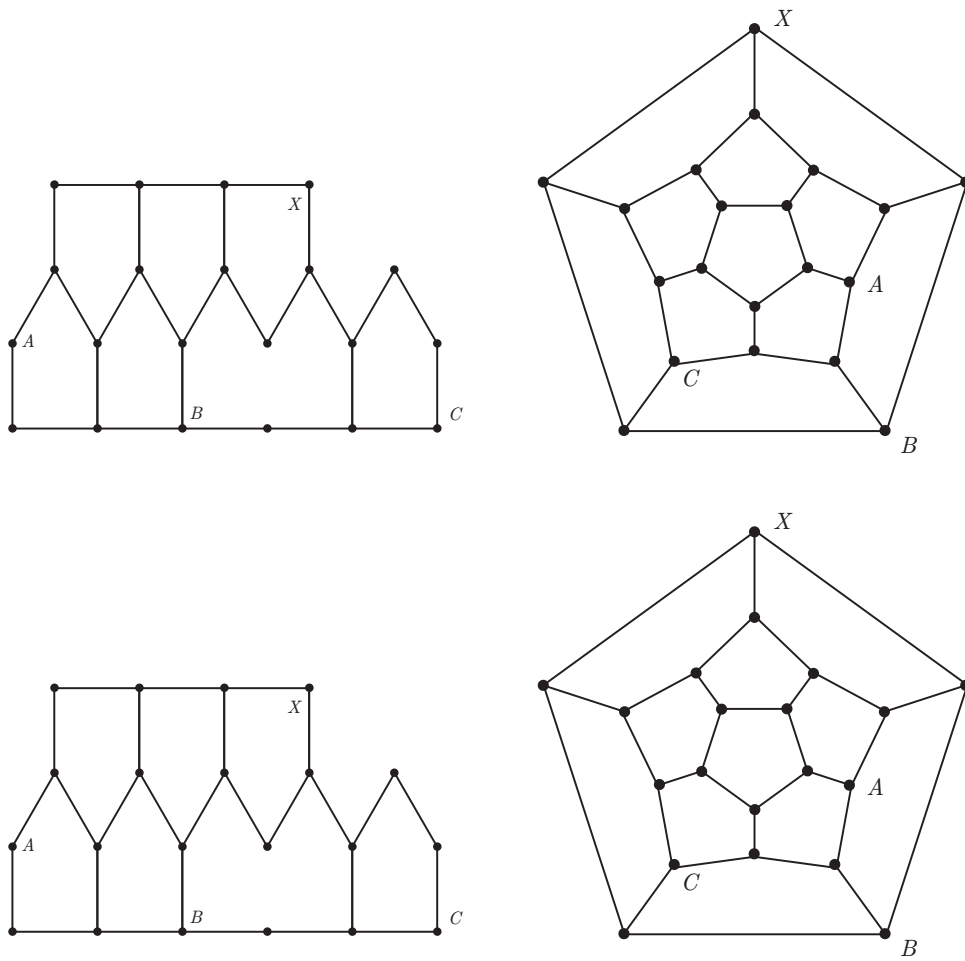


図 13.4 最短経路と時間 2

練習 図 13.5 で  $X$  から町  $A$ ,  $B$ ,  $C$  へ行く最短経路と時間を求めよ.

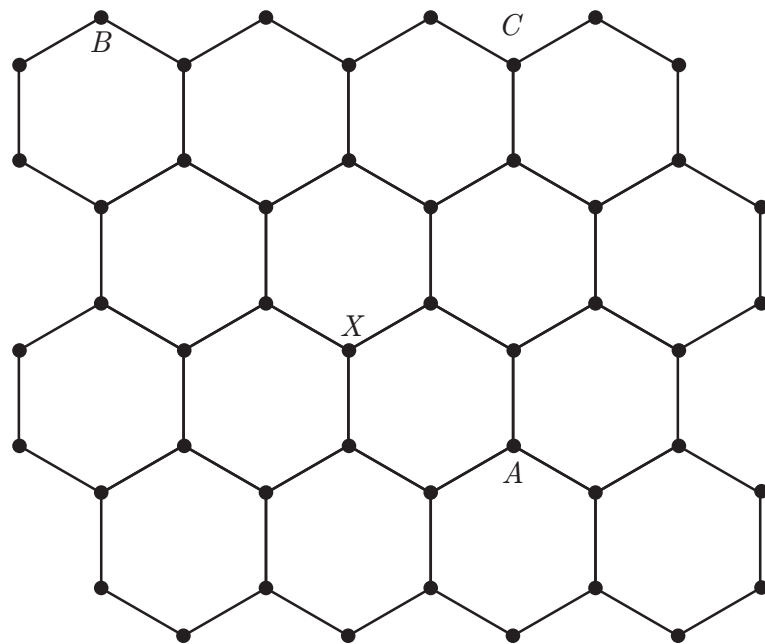
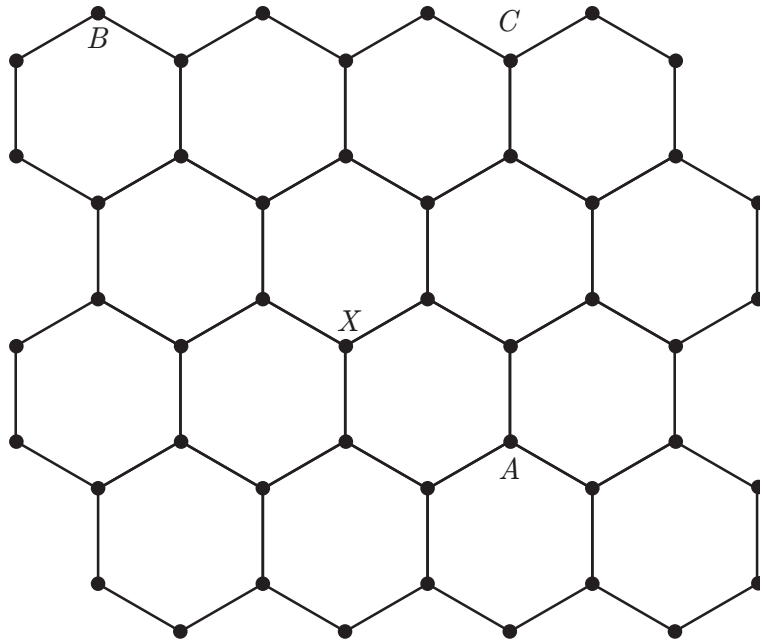


図 13.5 最短経路と時間

レポート 40 図 13.6 で  $X$  から町  $A$ ,  $B$ ,  $C$  へ行く最短経路と時間を求めよ。このレポートをすれば、最短経路を求めるアルゴリズムはしらみつぶしに経路を求めていて、時間が掛かる事がわかるだろう。

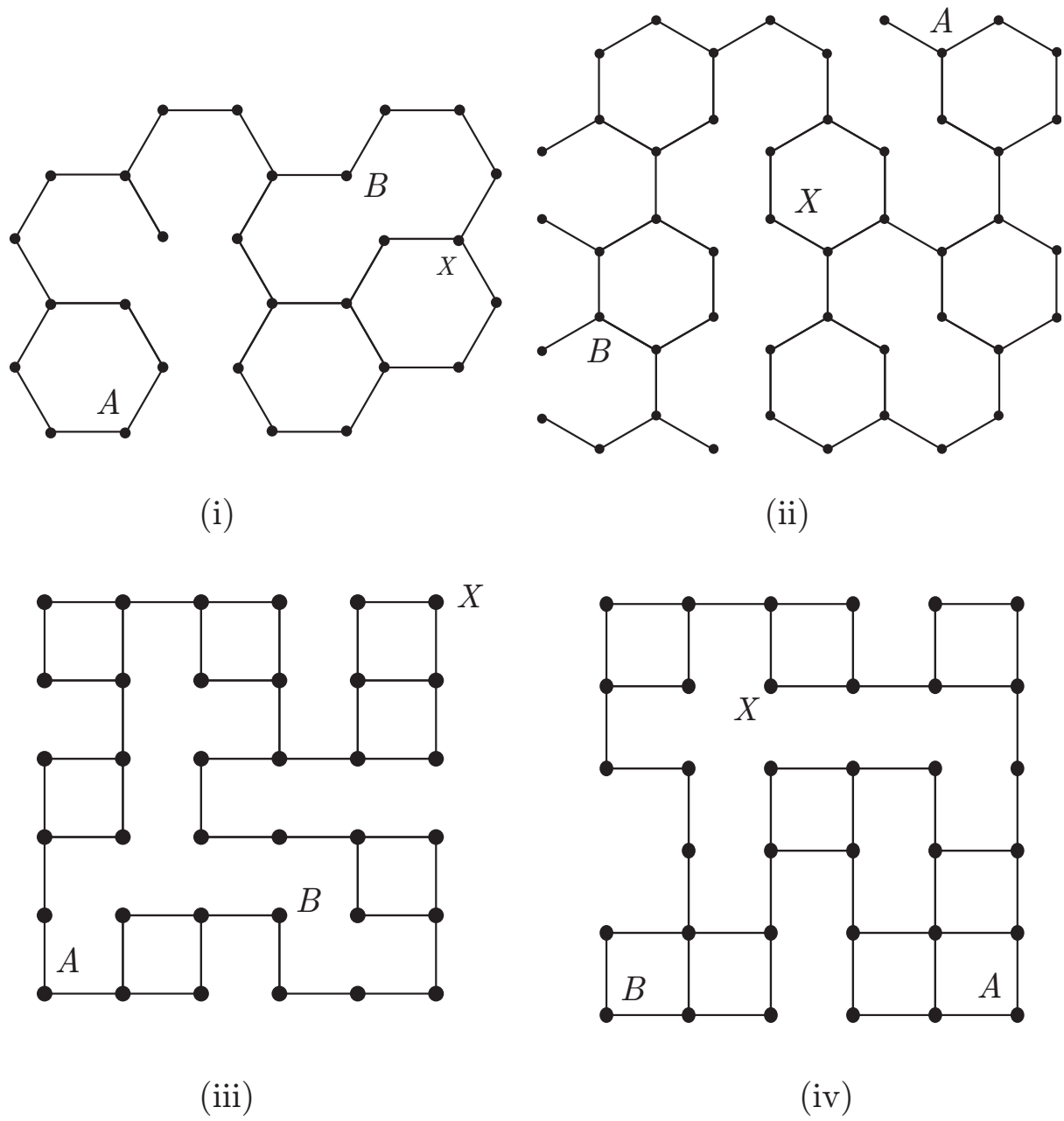


図 13.6 最短経路と時間 レポート

## 13.2 色々な距離のある国内旅行

普通の国だと町から町への移動時間はまちまちです．そのような場合はどうすれば良いでしょうか．前の問題では，すべての辺に1時間という重みがついていました．そして，1時間でいける町をすべて求めて，次は2時間で行ける町をすべて求めました．1時間で行くという条件を最短時間で行くことのできると変えれば，時間がさまざまな場合にも対応できます．すなわち，基点となる町  $X$  から最短時間で行く事のできる町をすべて求めます．そして，それらの町に対して最短時間で行く事のできる町をすべて求める，という普通に考え付く方法です．

移動時間が様々なので図 13.7 の様に辺に移動時間を書きます．

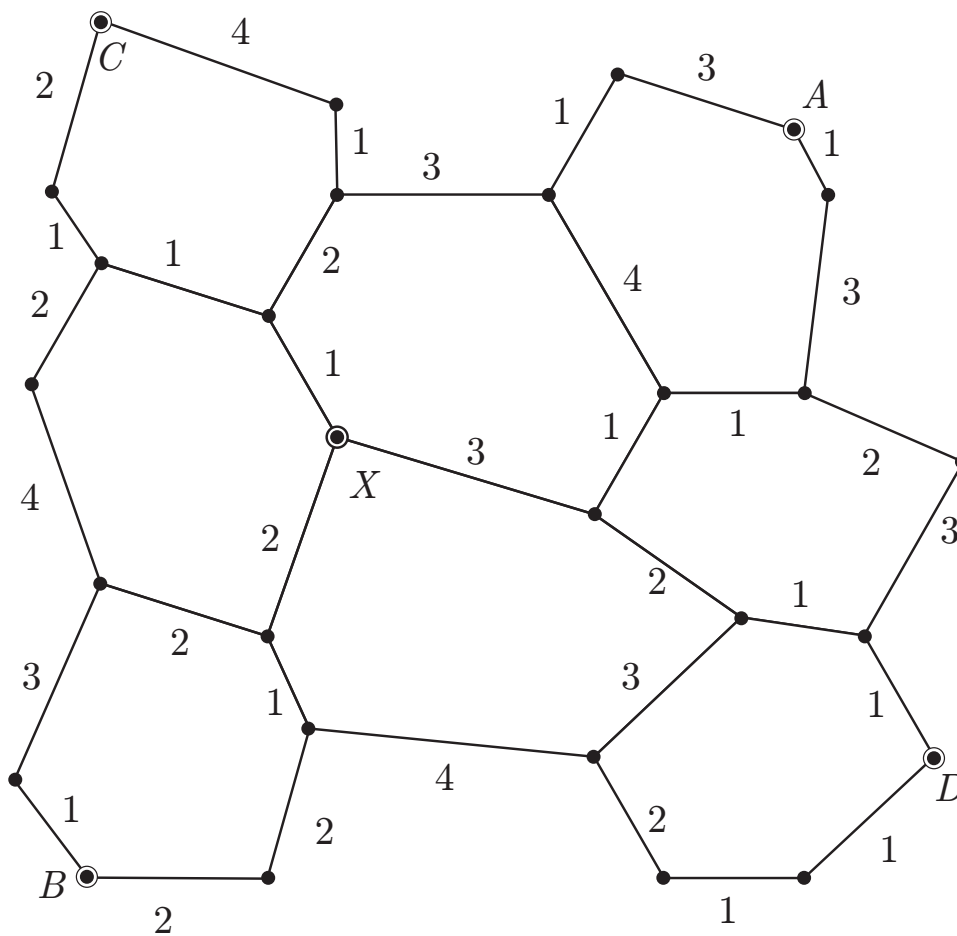


図 13.7 最短経路と時間

### ダイクストラ (Dijkstra) のアルゴリズム

- (1)  $X$  から最短時間で行くことのできる頂点を求める．各頂点にその時間を書き込み，その頂点と  $X$  を結ぶ辺を青色で塗る．
- (2) まだ色のついていない頂点で  $X$  から最短時間で行くことのできる頂点を求める． $X$  からの最短時間を

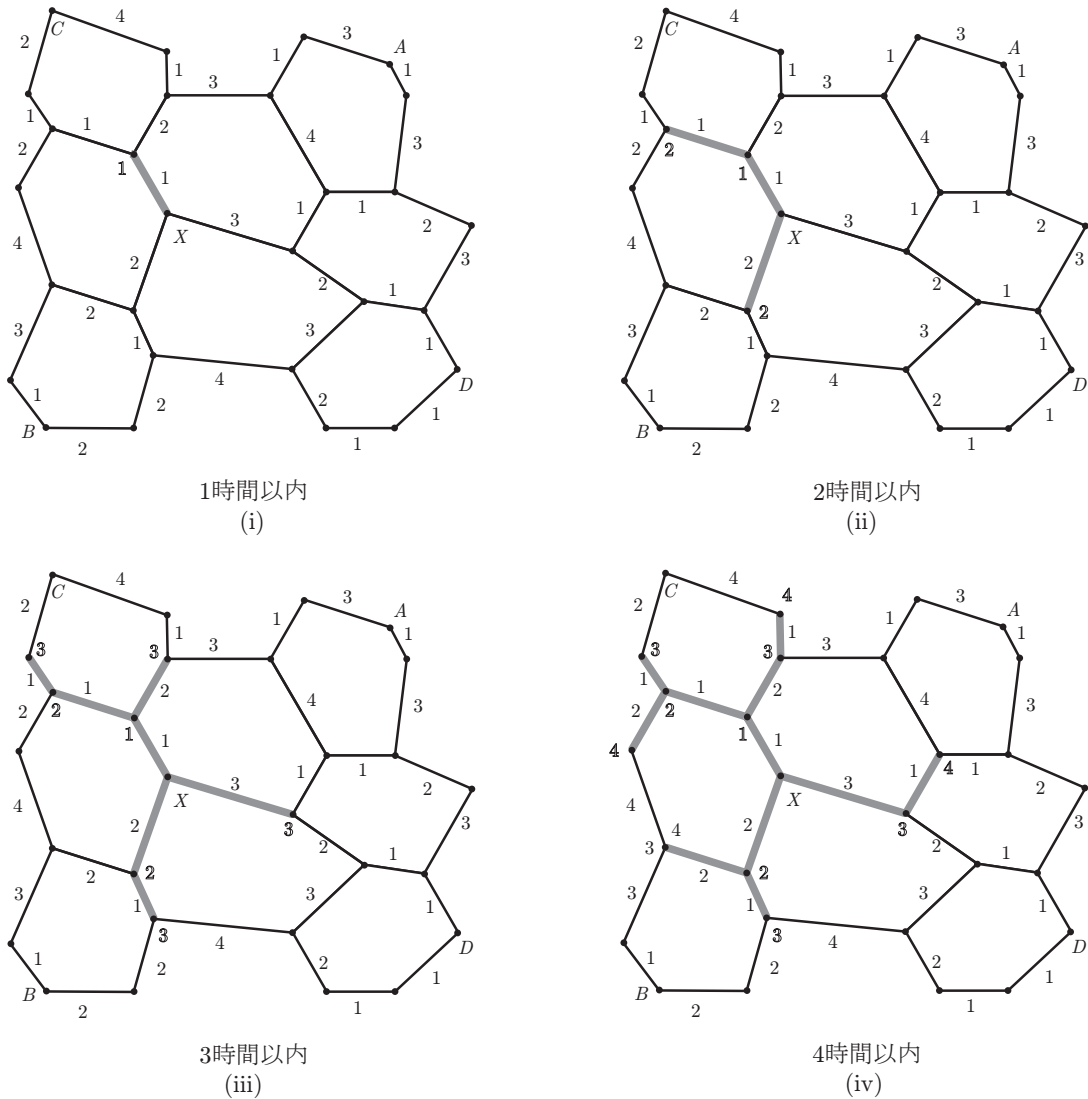


図 13.8 最短経路と時間の求め方 1

書き込み、その頂点と辺を青色で塗る。

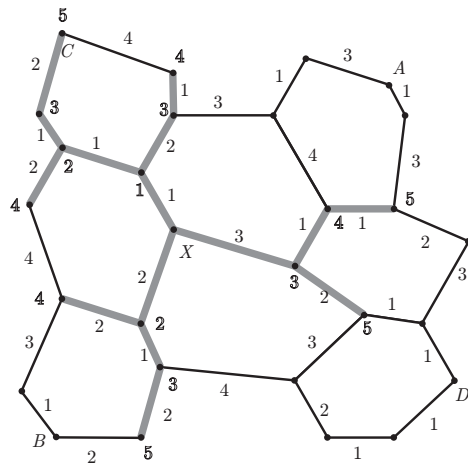
- (3) 色のついていない頂点で  $X$  から最短時間で行くことのできる頂点を求める。  $X$  からの最短時間を書き込みその頂点と辺を青色で塗る。
- (4) 以下この操作を繰り返す。

この操作を図 13.7 に対して行ったのが、図 13.8 と図 13.9 である。  $X$  から始めて、順番に  $X$  に近いところから最短経路と時間を求めていくのがわかる。これらの図では、最短時間は頂点に白抜きの数字で書いてある。

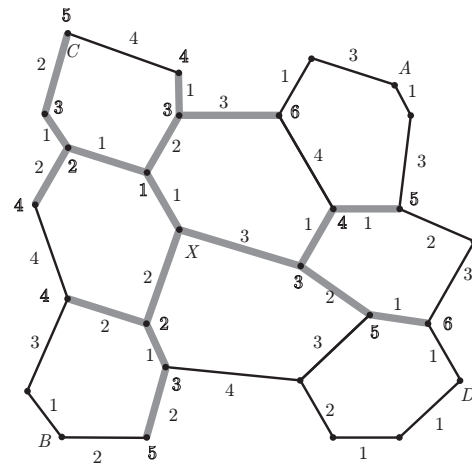
上のアルゴリズムがわかりにくい場合は図 13.7 に対して、直感で最短経路と時間を書き込んでください。そして、結果が図 13.8 と図 13.9 のようになっていれば、今考えた方法がダイクストラのアルゴリズムです。

したがって、ダイクストラのアルゴリズムは何か特別な方法で最短経路と時間を求めているわけではあり

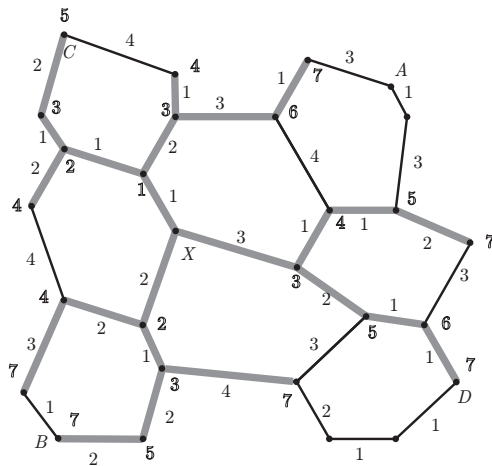




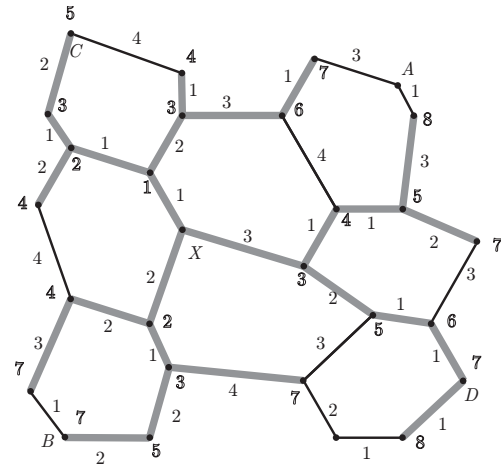
5時間以内  
(v)



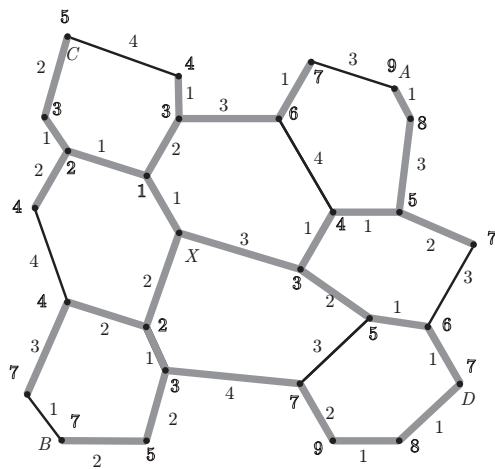
6時間以内  
(vi)



7時間以内  
(vii)



8時間以内  
(viii)



9時間以内  
(ix)

図 13.9 最短経路と時間の求め方 2

ません．素直に一つ一つの頂点に対して求めていきます．したがって、頂点数が多いとかなり時間が掛かります．グラフ理論の専門書ではこのアルゴリズムをどのようにして、コンピュータに乗せるかが書いてあります．

また、頂点の個数が多いとコンピュータに計算させても時間が掛かります．それで、情報関係の本だと、どれくらい時間が掛かるかの評価の方法が書いてあったりします．

練習 図 13.10 のグラフについて  $X$  を基点とする最短経路と時間を求めよ．(3 つコピーを用意してあります．)

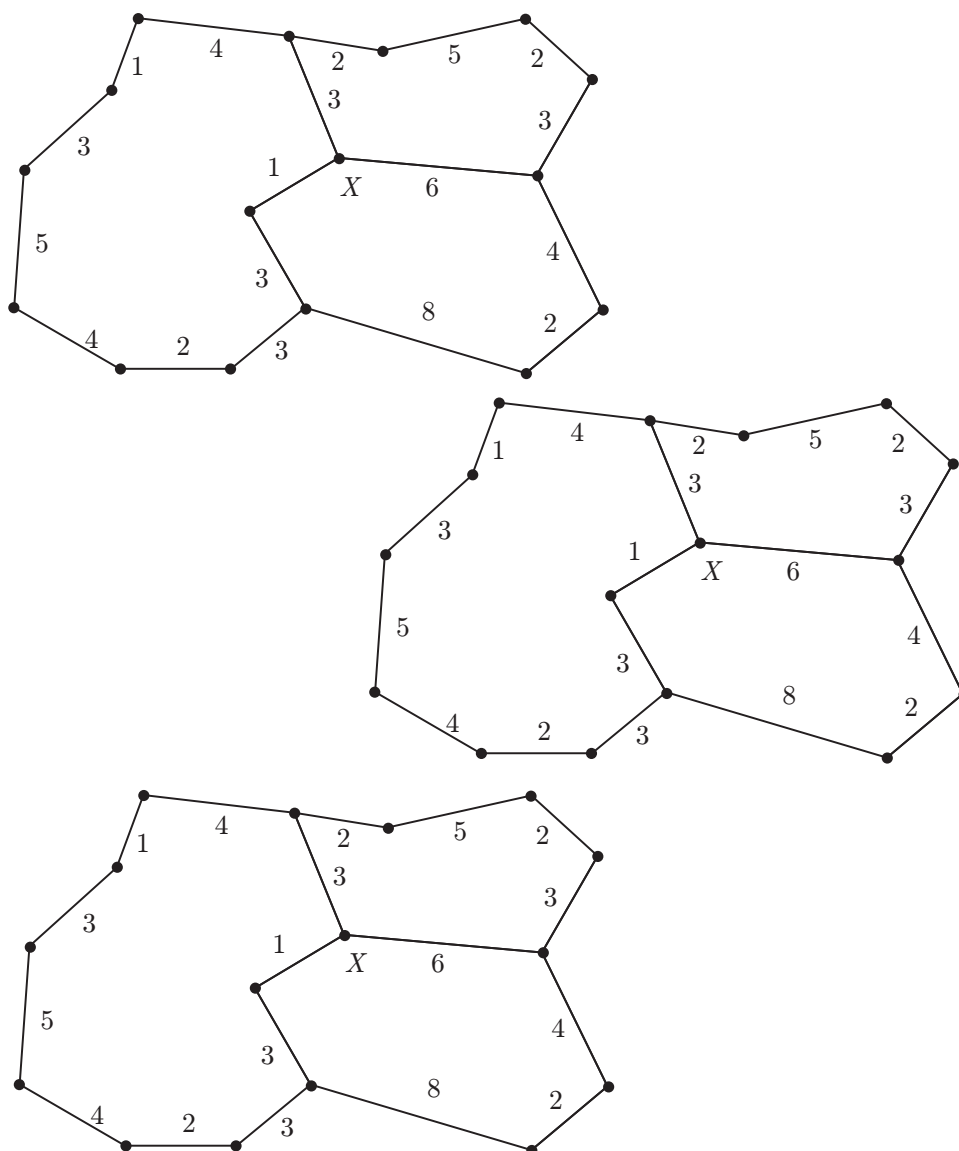


図 13.10 最短経路と時間 1

練習 図 13.11 のグラフについて  $X$  を基点とする最短経路と時間を求めよ .

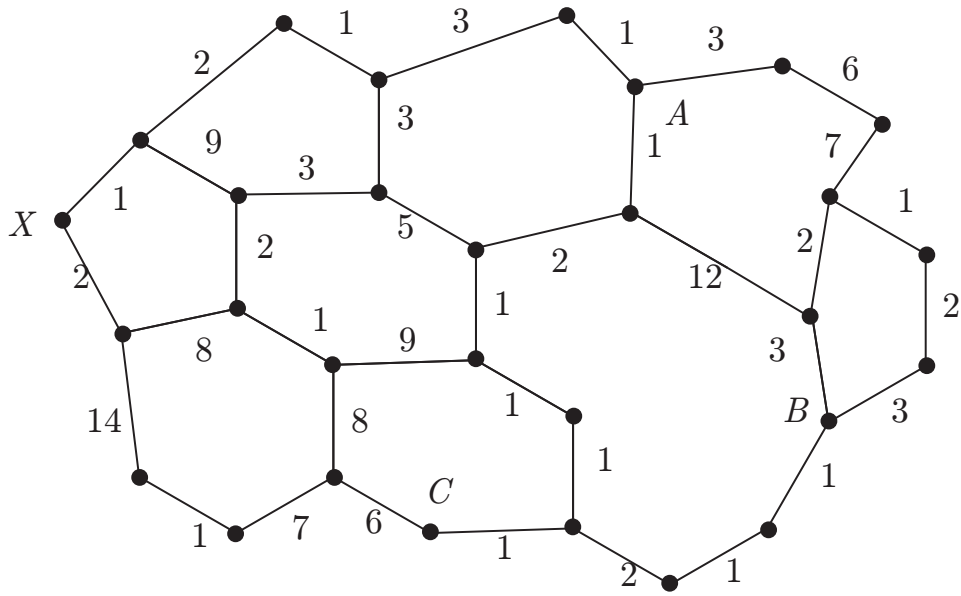
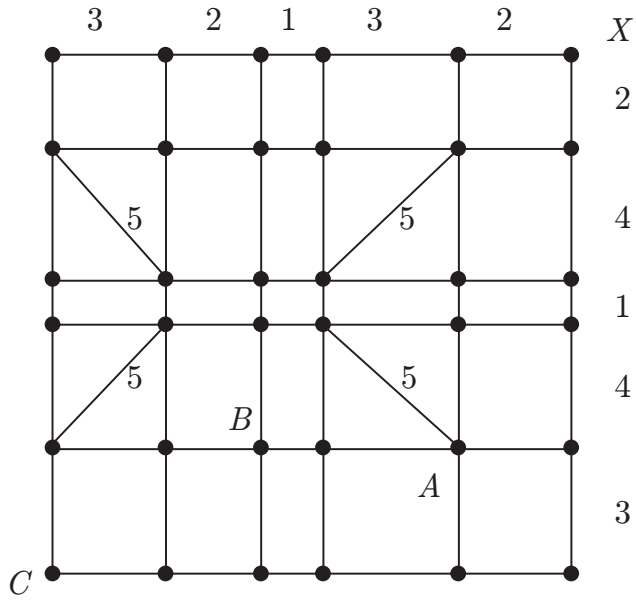


図 13.11 最短経路と時間 2

レポート 41 図 13.12 のグラフについて  $X$  を基点とする最短経路と時間を求めよ .

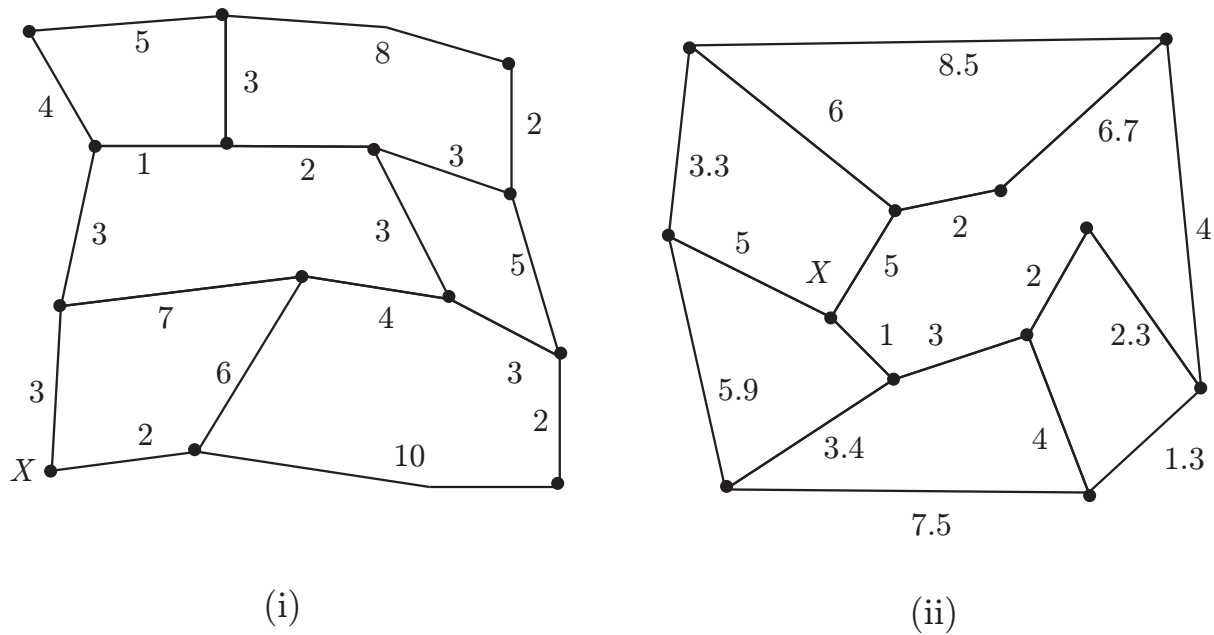


図 13.12 最短経路と時間のレポート