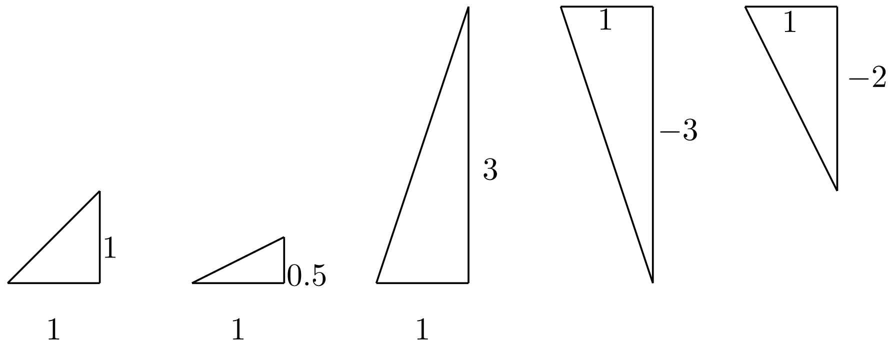
2013-6-7

❶微分とは

直線の傾きとは x 軸方向に 1 進む時の y 軸方向の増分 Δy である.



傾き 1　　傾き 0.5　　傾き 3　　傾き -3　　傾き -2

Q1. x 軸方向に 1.5 進んだ時の y の増分が 3 であるとき, 傾きはいくらか.

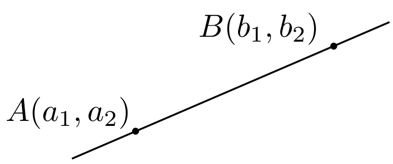
A.____________________

x の増分が Δx で y の増分が Δy のとき, 傾き m は

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

である.

Q2. $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ を通る直線の傾きを求めよ.



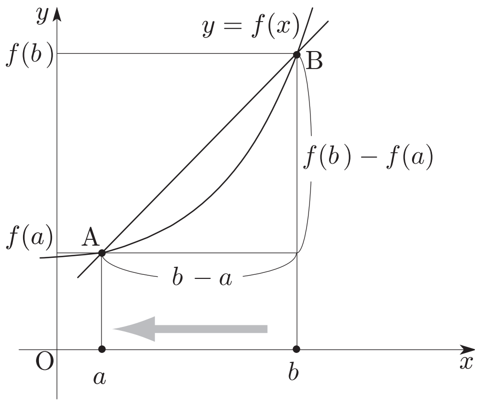
A.____________________

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $A(a, f(a))$ の接線の傾き

曲線 $y=f(x)$ 上の 2 点 $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ を通る直線の傾きは

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

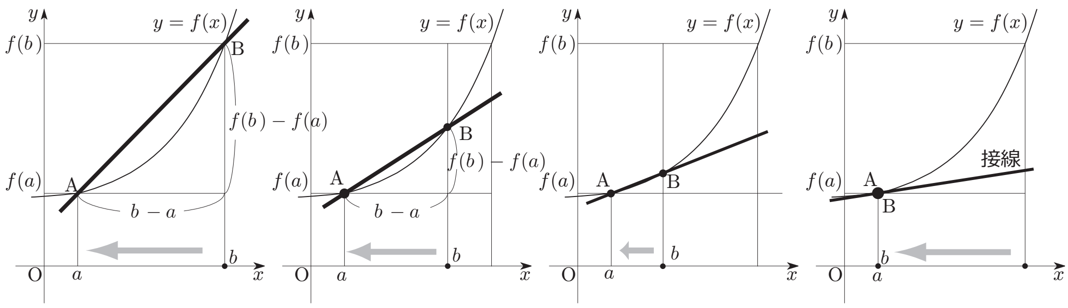
である.



$b \to a$ とすると, この傾きは曲線上の点 A での接線の傾きになる[*1]. 接線の傾きは

$$\lim_{b \to a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

となる. この値を $y=f(x)$ の点 $x=a$ における 微分係数 という[*2].



☞ x の増分を強調して b の代わりに $a+h$ を使う時もある. この時, 接線の傾きは, h や Δx と Δy を使って,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad \text{または} \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

となる.

---

*1 $b=a$ とすると, 分母が 0 となり計算できないことに注意.

*2 接線の式の x の係数だから.

練習 1 曲線 $y = x^3$ に対して

(1) $x = 2$ での接線の傾きを求めよ.

(2) 点 x での接線の傾きを求めよ.

解答

(1)
$$\begin{aligned}\lim_{b\to 2}\frac{b^3-2^3}{b-2} &= \lim_{b\to 2}\frac{(b-2)(b^2+2b+2^2)}{b-2}\\ &= \lim_{b\to 2}(b^2+2b+2^2)\\ &= 3\cdot 2^2\end{aligned}$$

したがって, $y = x^3$ の点 $(2, 8)$ での接線の傾きは 12 である.

(2) $x = 2$ の代わりに x を使って計算すれば良い.

$$\begin{aligned}\lim_{b\to x}\frac{b^3-x^3}{b-x} &= \lim_{b\to x}\frac{(b-x)(b^2+xb+x^2)}{b-x}\\ &= \lim_{b\to x}(b^2+xb+x^2)\\ &= 3\cdot x^2\end{aligned}$$

(2) は点 x での接線の傾きが $3\cdot x^2$ であることを表している. そこで, $f(x)$ の点 x に接線の傾きを対応させる. この関数を $f'(x)$ で表し, $f(x)$ の <u>導関数</u> という. 導関数を求めることを微分するという. 練習 1 では $f'(x) = 3x^2$ である. 導関数は接線の傾きを対応させていることに注意する.

導関数 $\quad f'(x) = \lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \left(\dfrac{df}{dx},\quad \dfrac{dy}{dx}\quad \text{などでも表す}\right)$

練習 2 曲線 $y = x^2$ に対して

(1) $x = 2$ での接線の傾きを求めよ.

(2) $x = a$ での接線の傾きを求めよ.

(3) 導関数を求めよ.

$$(x^a)' = ax^{a-1} \quad a: \text{実数} \qquad\qquad c' = 0 \quad c: \text{定数}$$

x の a 乗の導関数 (微分) は ax^{a-1} である. 定数を微分すると 0 になる. $y = c$ の傾きは 0 である.

公式 1 $\quad (f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x), \quad cf(x))' = cf'(x) \quad c$ は定数

$$(x^3 \ + \ 2x^2 \ + \ 3x \ + \ 4)' = \boxed{}$$

公式 2 $\quad (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$$((x^4 + 3x^2 + 1)(x^3 + 2))'$$

$$= \boxed{}$$

$$= \boxed{}$$

公式 3 $\quad \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

$$\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)' = \boxed{}$$

$$= \boxed{}$$

教科書 p. 60 例題 25 と練習問題 22 をやってみよう.

❷合成関数の微分法

合成関数

例題 1 $y=(3x^2+1)^5$ のとき, $u=3x^2+1$, $y=u^5$ とおく.

$$\begin{cases} u=3x^2+1 \\ y=u^5 \end{cases}$$

y に u を代入すればもとの式が得られる.

例題 2 $y=\sin(2x+3)$ のとき, $u=2x+3$, $y=\sin u$ とおく.

例題 3 $y=\log(x^2+1)$ のとき, $u=x^2+1$, $y=\log u$ とおく.

導関数を求めるために y の式がなるべく簡単になるように u を決めるのがコツである.

練習 次の関数を合成関数に分解せよ.

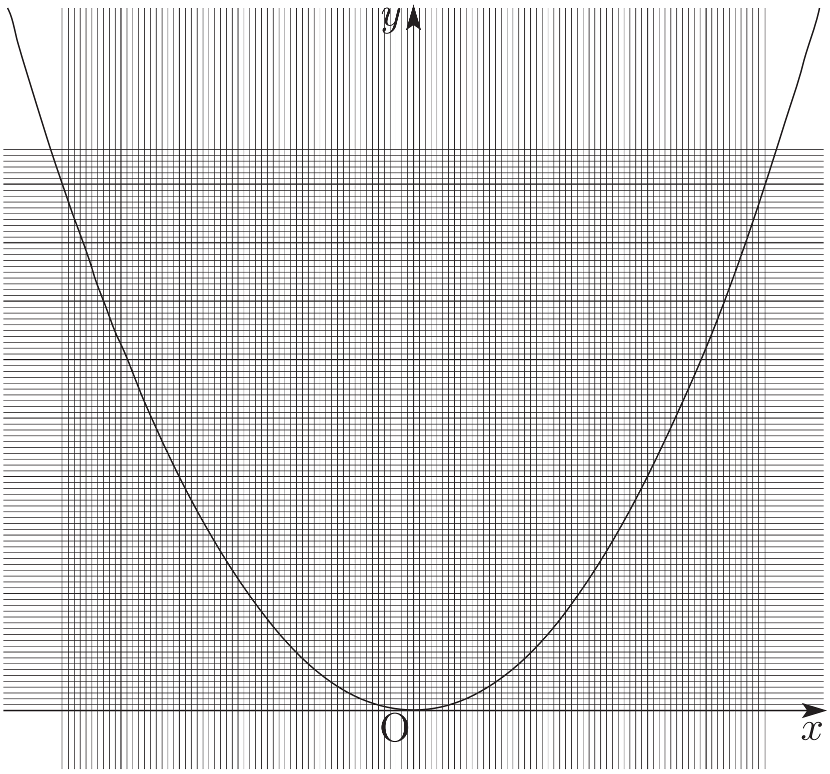
(1) $y=(x^2+2x+3)^4$　　(2) $y=\sqrt{x^2+2x+3}$　　(3) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x^3+1}}$

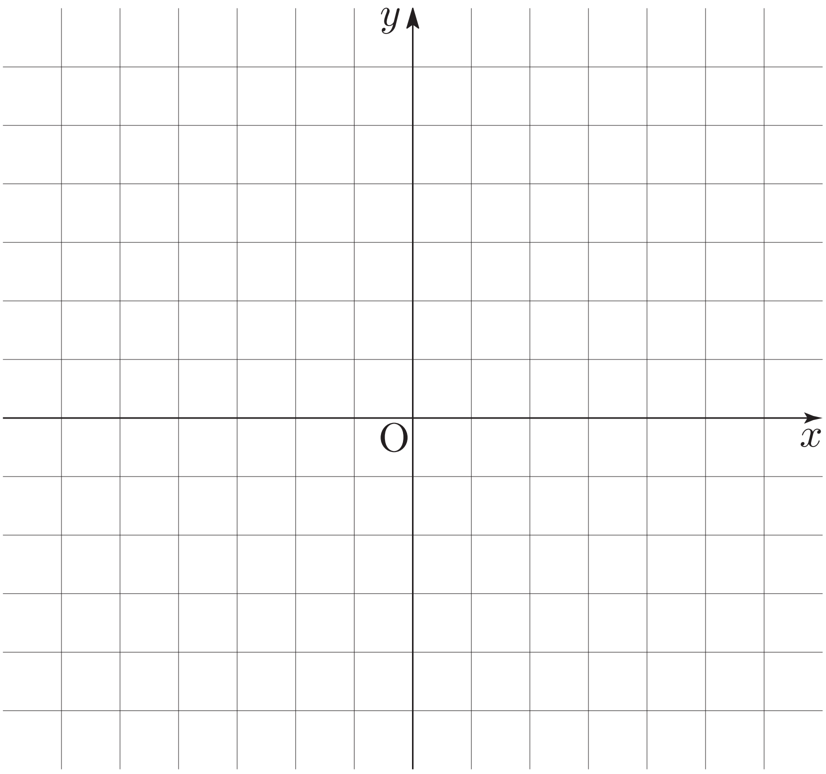
合成関数の微分法

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

例題 26　$y=(3x^2+1)^5$ のとき, y' を求めよ.

❸ 各点での接線の傾きを求めて $y = \dfrac{1}{4}x^2$ を微分してみよう.





❹ 指数と対数と

$2^2=4,\ 2^3=8$ である. $4\times 8=2^2\times 2^3=2^{2+3}=2^5$ である.
掛算 4×8 は指数では足し算 $2+3$ になる.

$p=a^{\log_a p},\ p=a^{\log_a q}$ である. $pq=a^{\log_a pq}$ だが

$$\begin{aligned} pq &= p\times q \\ &= a^{\log_a p}\times a^{\log_a q} \\ &= a^{\log_a p+\log_a q} \end{aligned}$$

より,

$$\log_a pq=\log_a p+\log_a q$$

となる.

この式は, 通常の掛算は指数では足し算になることを表しているに過ぎない.

問 $\sin\theta = 1/2$ を満たす θ を求めよ.

はちべえ　$\theta = \pi/6$ だな.

ごん兵衛　$\theta = 5\pi/6$ も $1/2$ になるよ.

はちべえ　じゃあ θ は 1 つに決まらないよ.

ごん兵衛　θ の範囲に制限をつけると 1 つに決まるよ.

はちべえ　$0 \leqq \pi \leqq 2\pi$ にすれば良いかな.

ごん兵衛　それでは $\theta = \pi/6$ と $\theta = 5\pi/6$ の 2 つがやはり含まれるよ.

はちべえ　えっと, $-\pi/2 \leqq \theta \leqq \pi/2$ とすれば良いのか.

ごん兵衛　そうだね, $-\pi/2 \leqq \theta \leqq \pi/2$ と θ を制限すれば, $\sin\theta = 1/2$ を満たす θ は 1 つに決まるね.

はちべえ　毎回「$-\pi/2 \leq \theta \leqq \pi/2$ の時, $\sin\theta = 1/2$ を満たす θ」と書くのは面倒だから θ を何か新しい記号で表したいな.

ごん兵衛　$x = \sin\theta$ の時の θ の値を求めているから $\sin$ を使って $\theta = \mathrm{Sin}^{-1}x$ と表せばわかりやすいよ.

はちべえ　この値は $-\pi/2$ から $\pi/2$ の間にあることに注意しないといけないな.

はちべえ・ごん兵衛　$\cos\theta$ と $\tan\theta$ も同じように値が 1 つになるように考えれば良いよね.