微分方程式 2

2012-12-21

【 変数分離形】

$\boxed{y\text{ の式}}\dfrac{dy}{dx} = \boxed{x\text{ の式}}$ または $\boxed{y\text{ の式}}\,dy = \boxed{x\text{ の式}}\,dx$

【 例題 】 $\dfrac{dy}{dx} = 3(y-1)^{\frac{2}{3}}$ を解け.

$\boxed{y\text{ の式}}\,dy = \boxed{x\text{ の式}}\,dx$ で表すと, $\boxed{}\,dy = \boxed{}\,dx.$

ただし, 分母は 0 でないので, $\boxed{❶}$

積分して,

$$\int \boxed{}\,dy = \int \boxed{}\,dx$$

$$\boxed{} = \boxed{}$$

$$\boxed{} = \boxed{} \quad - ❷$$

❶ でないとき $\boxed{❸}$

❷ と ❸ より解は

$\boxed{}$, $\boxed{}$ となる.

【 一次反応 】

$$\frac{dA}{dt} = -kA \qquad k : \text{定数}$$

【 例題 90 】 初めのラジウムの量を $\boxed{}$ とする.

時刻 t の時のラジウムの量を A とすると, 一次反応より

$$\boxed{\phantom{\frac{dA}{dt} = -kA}} \quad \text{—} ❶$$

❶を解く. A は t の関数に注意する. 変数分離形より

$$\boxed{}\, dA = \boxed{}\, dt$$

積分して, $\displaystyle\int \boxed{}\, dA = \int \boxed{}\, dt$

$$\boxed{} = \boxed{}$$

$$\boxed{} = \boxed{}$$

$$A = \boxed{}$$

$$A = \boxed{}$$

$t = 0$ のとき, $A = A_0$ より, $\boxed{}$.

よって, $C = \boxed{}$.

$A = \boxed{}$.

$t = 1600$ のとき, $A = \dfrac{1}{2}A_0$ より

$$\boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

両辺の log をとって,

$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$ から $k = \boxed{\qquad\qquad}$.

よって $A = \boxed{\qquad\qquad\qquad}$.

(1) $t = 3200$ のとき

$$A = \boxed{\qquad\qquad\qquad}$$

$$= \boxed{\qquad\qquad\qquad}$$

$$= \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

(2) $t = 800$ のとき

$$A = \boxed{\qquad\qquad\qquad}$$

$$= \boxed{\qquad\qquad\qquad}$$

$$= \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$e^{\log a} = a$ は log の定義です．教科書 p. 22　でも, なかなか覚えられない

$y = e^{\log a}$ とおいて log をとると $\log y = \boxed{}$ より,

$y = \boxed{}$ となる．したがって，$e^{\log a} = \boxed{}$ である.

1 階線形微分方程式

$$y' + p(x)y = q(x)$$

の一般解は,

$$y = e^{-\int p(x)\,dx}\left\{\int e^{\int p(x)\,dx} q(x)\,dx + C\right\} \quad (C \text{ は任意定数})$$

【 例題 92 】(2) $xy' - y = \log x$　y' の係数が 1 でないことに注意.

y' の係数を 1 に直すと, $\boxed{}$.　($\log x$ より $x > 0$)

$p(x) = \boxed{}$,　$q(x) = \boxed{}$ より

❶ $\int p(x)\,dx = \boxed{}$.　$e^{-\int p(x)\,dx} = \boxed{}$

,

$e^{\int p(x)\,dx} q(x) = \boxed{}$ より

❷ $\int e^{\int p(x)\,dx} q(x)\,dx = \boxed{} = \boxed{}$

$= \boxed{}$.

よって, $y = \boxed{}$.